24

D. D.

DISSERTATIO GRADUALIS, DE OBSERVATIONIBUS D'ALEMBERTI IN DISQUISITIONEM NEWTONIANÆ LEGIS REFRACTIONIS KLINGENSTJERNIANAM.

QUAM

Conf. Amplisf. Facult. Philos. in Reg. Acad. Aboënsi,

PRÆSIDE

MAG. ANDREA PLANMAN,

Phys. Natur. PROFESSORE Reg. & Ord. Nec non Reg. Acad. Scient. Stockholm. MEMBRO.

Publico examini submittit

ABRAHAMUS NIC. CLEWBERG,

Tavastensis.

In AUDITORIO MAJORI Die XVIII. Julii MDCCLXXII.

Tempore a. m. solito.

ABOÆ

Typis JOHANNIS CHRISTOPHORI FRENCKELL.

Enke Profeſſorſkan

HÖGÅDLA FRUN

Fru CHARLOTTA AGATHA CLEWBERG

Född FAHLENIA,

MIN HULDASTE MODER!

Den ömhet, hvarmed J, Min Huldaſte Moder enſam haft omſorg för min upfoſtran, ſedan den Högſte i mina ſpåda år behagat hådankalla Min Kåre Fader, har tilſkyndat mig ſtörre fördelar, ån jag någonſin hinner aftjena. Igenom Eder förſorg och omkoſtnad har mig intet tilfälle trutit hvarken til ſnillets upodlande eller hjertats förbåttrande. Hvilket jag beſtåndigt ſkal årkånna med lifligaſte vördnad och ödmjukaſte tackſamhet. GUD den Högſte gjöre Min Huldaſte Moders dagar ſå många och ſå förnöjliga ſom jag dem önſkar; ſå får jag långe njuta den oſkattbara förmån at med vördnad framhårda

MIN HULDASTE MODERS

ödmjuke och lydige Son

ABRAH. N. CLEWBERG.

§. I.

Postquam magnus ille NEWTONUS emendationem tuborum Dioptricorum desperandam censuerat, idque inprimis ob radiorum luminis heterogeneorum diversam refrangibilitatem, quæ efficit, ut radii dispergantur imaginesque objectorum coloratæ exhibeantur; nisi, ad mentem NEWTONI radii emergentes per contrarias refractiones cum incidentibus facti fuerint paralleli; quo ipso Tubi sua amplificandi potentia privarentur: nemo, quantum constat, de emendandis his tubis cogitavit ante insignem nostri ævi Mathematicum LEONHARDUM EULERUM, qui in *Miscellaneis Berolin.* Anni 1747, assumta nova quadam lege refractionis radiorum heterogeneorum, vitra objectiva ex duobus meniscis, quorum spatium intermedium aqua occuparet, componenda proposuit, ut aberratio radiorum, oriunda ex eorundem diversa refrangibilitate, tolleretur. At quia tubi ad modum ab EULERO præſcriptum conformati, ſucceſſu optato caruerunt; Clariſſimus Londinenſium Opticus DOLLONDUS, hinc arripuit occaſionem impugnandi legem refractionis EULERIANAM; inprimis cum legi *Newtonianæ* minime congruebat. Quapropter res EULERUM inter atque DOLLONDUM in controverſiam adducebatur, quæ forſitan diu indeciſa manſiſſet, niſi Illuſtriſſimus KLINGENSTJERNA, ſub examen revocato experimento *Newtoniano*, cum eidem innixa lege refractionis radiorum heterogeneorum, DOLLONDO dediſſet anſam ab integro inſtituendi experimenta, quæ legem neque *Newtonianam* neque *Eulerianam* cum natura rei conſiſtere evicerunt. Et quamvis examen hoc *Klingenſtjernianum* ad rigorem Geometricum exactum omnino fuerit; nihilominus tamen Celeberrimus D' ALEMBERT iſtud ſubinde conatus eſt infringere; at quo jure & quo ſucceſſu, id ex ſequentibus pateſcet.

§. II.

Lex autem *Newtoniana*, cujus mentionem in rubro & in §. I. fecimus, ita ſe habet: *Exceſſus ſinuum variorum generum radiorum ſuper communem ſinum incidentiæ, cum refractiones fiant e pluribus diverſis mediis denſioribus, immediate in unum idemque medium rarius, puta aërem tenuiſſimum; ſunt inter ſe in data proportione.* Atque hoc theorema NEWTONUS deduxit ab experimento ſic deſcripto: *Obſervavi præterea cum lumen ex aëre, per diverſa media*

dia refringentia inter se contigua ut aquam & vitrum transmittatur, indeque iterum in aërem transeat; id lumen, sive superficies, quibus refringatur, parallelæ sint inter se, sive inclinatæ, tamen quotiescunque contrariis refractionibus ita correctum sit, ut emergat tandem in lineis parallelis ad eas, in quibus inciderit, deinceps semper album permanere: sin radii tandem emergentes sint incidentibus inclinati; tum luminis emergentis albitudinem pro eo ut id a loco emersionis ulterius progrediatur, paulatim se ab extremis sui partibus in colores induere. Hoc expertus sum satis accurate, refringendo lumen per prismata vitrea in vase prismatico aquæ pleno collocata. (Opt. Libr. I. Pars II. Prop. III. Exper. VIII.

Num vero ab experimento hocce Theorema allatum deduci possit, numque isthoc experimentum sibi constare possit, Acutissimus D:nus KLINGENSTJERNA; in *Actis Reg. Acad. Scient. Stockh. Anni 1754. p. 297. seqq.* disquisivit, ut sequitur. Sit BFC (Fig. I.) sectio prismatis vitrei, a partibus FB, FC, mediis L & W diversarum virium refringentium circumdati; atque transeat radius homogeneus ABCD per media hæc refringentia, ita ut pars ipsius emergens CD sit parallela incidenti AB. Per puncta B & C ducantur rectæ $a\,\alpha$, $b\,\beta$, perpendiculares ad latera prismatis FB, FC; atque statuatur sin AB a : sin α BC : : r : i; nec non sin BC b : sin β CD : : p : r. Hisce positis, ex dato prismatis angulo refringente BFC, sequentem in modum determinatur angulus incidentiæ ABa : scilicet secentur in li-

 nea

nea quacunque TP (Fig. II.) partes TM, TI, TG, quantitatibus r, p, i, respective proportionales, & supra GI describatur segmentum circuli IHG, continens angulum æqualem angulo prismatis BFC. Ex centro T radio TM descripto circulo MH secante priorem in H; ductisque rectis TH, GH, IH; erit radius emergens incidenti parallelus, si fuerit angulus incidentiæ AB a æqualis angulo PGH. Nam ob sin AB a : sin α BC : : r : i; & sin PGH : sin GHT : : TH : TG : : r : i; erit ang α BC = ang GHT, quoties fuerit ang AB a = ang PGH; quare BCb (= CB α + BFC = GHT + GHI) = THI. Cumque sin BC b : sin DC β : : p : r : : TI : TH : : sin THI : sin PIH; habebitur etjam DC β = PIH. At quoniam PGH = PIH — GHI; erit quoque AB a = DC β — BFC; id quod ad parallelismum radiorum incidentis AB & emergentis CD requiritur. (*)

§. III.

Hinc jam facile eruitur lex refractionis pro radiis heterogeneis, cum singuli emergentes fuerint paralleli communi radio incidenti AB; in quem finem supponatur radius AB compositus ex binis heterogeneis, atque

(*) Nam AB producta secet rectam FC in O (Fig. I.); erit BOS = BFC + FBO = BFC + FB α + AB a; at ob AO & CD parallelas (per hyp.) habetur BOS = FCD; quare FCD = DCβ + FCβ = BFC + FBα + AB a; adeoque ob FCβ = FBα; erit AB a = DCβ — BFC.

atque fiat pro quovis horum constructio, modo in §. II. præscripto, ita ut recta TM = TH sit ejusdem longitudinis in utraque constructione, & una alteri imponatur, (Fig. III.) ut coincidant rectæ TH; dabuntur puncta G & *g*, in uno eodempue arcu circuli HG*g*T, nec non puncta I, *i*, in arcu HI*i*T; quia in utraque constructione patet angulos MIH esse æquales, ut & angulos MGH. Si itaque per proportionem rectarum TG, TI, TH, exhibeatur lex refractionis radii minus refrangibilis; dabitur lex refractionis radii magis refrangibilis per proportionem ipsarum T*g*, T*i*, TH; dummodo radii emergentes fuerint paralleli radio incidenti. Ad instituendam jam comparationem inter hanc atque *Newtonianam* legem refractionis radiorum diverse refrangibilium, describatur centro T & radio TH arcus circuli HM*m*, cui rectæ TGI & T*gi* occurrant in punctis M & *m*.

Cumque, vi legis *Newtonianæ* $r - i : r - p$: : GM : IM : : *gm* : *im*; adeoque IM : GI : : *im* : *gi*; Et ob ang GIH = ang *gi*H habetur GI : IH : : *gi* : *i*H; quare ex æquo IM : IH : : *im* : *i*H; unde foret ang TMH = ang T*m*H, & consequenter puncta M & *m* essent sita in arcu circuli, cujus chorda foret TH; quod cum constructioni repugnat: sequitur legem refractionis NEWTONI minime posse conciliari cum experimento §. II:o allato. Unde ulterius conclusit Illustrissimus KLINGENSTJERNA, quod si eadem lex in natura daretur, experimento *Newtoniano* prorsus diversus adscribendus esset effectus, adeo ut, si unus radiorum heterogeneorum inter emergendum foret parallelus radio incidenti, reliqui tamen dissiparentur coloresque exhiberent.

§. IV.

Ut autem experimenti § II. allati falsitas ulteriori argumento constaret, Illustr. KLINGENSTJERNA evicit, pro quovis diverso angulo prismatis refringentis, diversam dari proportionem linearum TM, TI, TG; T*m*, T*i*, T*g*; vel quod eodem redit: si harum linearum proportio fuerit constans; erit quoque angulus prismatis GHI constans. Nam concipiatur linea T*m* cum punctis *g* & *i* circumvolvi circa punctum T, quoad T*m* cum ipsa TM coincidit; eritque manifestum trianguli *g*H*i* verticem H, translatum fuisse in peripheria circuli, cujus centrum est T & radius TM, atque ex figura III. prodiisse figuram IV. in qua triangula GHI & *ghi* sunt similia & similiter posita supra bases GI & *gi*, nec non verticibus suis ad peripheriam MH*h* constituta. Producatur itaque recta, per puncta H & *h* ducta, donec occurrat ipsi TM in F; atque erit *gi* : GI : : *ih* : IH : : *h*F : HF : : *i*F : IF, quare datur punctum F, una cum rectangulo *h*FH, atque erunt rectæ *h*F, HF, datæ magnitudinis. Obque punctum T & circulum MH*h* datum, dantur puncta H & *h*. At puncta G, I, & *g*, *i*, sunt quoque data *per hypoth.* ergo triangula GHI, *ghi*, etjam dantur. Data itaque lege refractionis binorum radiorum diverse refrangibilium, dabitur inde angulus

lus refringens prismatis, una cum positione eorundem radiorum, ut emergentes fiant communi radio incidenti paralleli. Hinc nulla lex constans, radiorum heterogeneorum est possibilis, quæ experimento *Newtoni* satisfaciat, quin potius pro vario angulo prismatis refringente, variæ quoque requirerantur leges, ad producendum radiorum emergentium parallelismum cum incidenti. Quapropter experimentum *Newtonianum* minime sibi constare potest, nisi supponatur id institutum fuisse cum prismate cujus angulus refringens erat admodum exiguus; in quo casu MG ad MI (Fig. 3.) foret quam proxime in data ratione: id quod Illustriss. KLINGENSTJERNA ultimo submonuit.

§ V.

Hæc inventa *Klingenstjerniana* communicabantur cum Celeberrimo Geometra CLAIRAUT; qui ea *Actis Academiæ Scientiarum Parisiensis* inserenda curavit; nec non cum Cl. DOLLONDO, qui inde ansam nactus est summa cum exactitudine repetendi experimentum *Newtonianum*, de cujus falsitate etjam a posteriori convictus, experimenta cum vitris instituenda agressus est; quibus institutis feliciter detexit, dari vitra, quæ potentia radios heterogeneos dissipandi plurimum differunt, quamvis æqualibus fere refringendi viribus gaudeant; quo præclaro invento & praxin & Theoriam Dioptrices insigniter auxit. Nam hinc emendationem Tuborum

Dio-

Dioptricorum felici cum ſucceſſu ſuſcepit ſagaciſſimus Vir, modumque corrigendi aberrationes ex diſſipatione radiorum heterogeneorum oriundas derivavit, componendo ita vitrum objectivum ex duabus lentibus, ut effectus ipſarum in diſſipandis radiis deſtruerentur. Diſcimus quoque hinc proportiones refractionum radiorum heterogeneorum nullatenus a ſe invicem pendere; adeoque fruſtra quæri regulam, qua ex data refractione alicujus radii in quovis medio inveniuntur refractiones reliquorum diverſi generis radiorum in eodem medio. Et quamvis inventa hæc *Dollondiana* allatis principiis NEWTONI evidentiſſime refragentur; *Klingenſtjernianam* vero demonſtrationem mirum in modum confirment; nihilominus tamen Celeberrimus D' ALEMBERT ſuſpicabatur errores quosdam in hanc demonſtrationem irrepſiſſe, quos ſibi, viſus eſt etjam detexiſſe, minus ponderatis argumentis in iſta occurrentibus.

§. VI.

Duo imprimis ſunt momenta in quibus Illuſtrium KLINGENSTJERNA hallucinatum eſſe contendit Cel. D' ALEMBERT: ſcilicet 1:o contendit iſtam demonſtrationem involvere hanc ſuppoſitionem, quod ſi

$$\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}=\frac{\frac{1}{M}-1}{\frac{1}{M'}-1}=a, \text{ foret quoque } \frac{\frac{m}{M}-1}{\frac{m'}{M'}-1}=$$

a, quæ tamen concluſio minime valet: deſignanti-

bus

bus m & M rationem refractionis ejusdem radii in binis diversis mediis; nec non m' & M' rationem refractionis radii diversæ refrangibilitatis in iisdem mediis. 2:o Contendit Illustr:um KLINGENSTJERNA in eo errasse, quod asseruerit legem refractionis *Newtoni* convenire cum ipsius experimento, quoties fuerint refractiones admodum parvæ, prout istæ habentur in casu, quo angulus prismatis refringens sit valde exiguus. Existimat enim D' ALEMBERT istam convenientiam in eo duntaxat casu obtineri, quo m & M perparum differunt ab unitate.

Atque hæc sunt palmaria momenta, quæ Cel. D' ALEMBERT, contra demonstrationem *Klingenstjernianam* in *Opusc. Math. T. III. pag.* 359. monuit; & quæ ulterius in *Opusc. Math. T. V. p.* 469. *seqq.* monenda duxit, subjuncta hac clausula: A l'" occasion de ces nouvelles remarques sur la preten-" düe demonstration de Monsieur KLINGENSTJER-" NA; je ne puis m' empêcher de temoigner quelque" surprise de ce que cette demonstration deja suffi- " samment réfutée dans le troisieme volume de mes" *Opuscules*, a cependant encore été adoptée depuis" dans les *Additions* à la traduction de l' *Optique de*" *Smith* (Avign. 1767. pag. 425).

§. VII.

Hac censura commotus Celebris Upsaliensium Mathematicus MALLET, *D' Alembertianas* observationes sibi refellendas & disquisitionem *Klingenstjernianam* illustrandam sumsit; id quod pro more suo solide præstitit in *Actis Reg. Acad. Scient. Stockh. anni 1771. pag. 138. seqq*; unde nos quoque desumemus præcipua momenta, quæ ad rem pertinent. Primum itaque observamus, quod Illustriss KLINGENSTJERNA accommodaverit suam solutionem ad experimentum *Newtonianum*, in quo medium a parte anteriori prismatis sive in L erat aër, in G vitrum, atque ad partem posteriorem prismatis in W erat aqua; adeo ut medium G fuerit densissimum, mediumque in W densius isto in L (Fig. I.); quare posito sin. ABa : sin. aBC :: m : 1, & sin βCb : sin βCD : : 1 : M; erit in Fig. 2. TM : TG : : m : 1; nec non TM : TI : : M : 1; datæ itaque sunt rectæ TM, TI & TG per datas radiorum luminis in hisce mediis refractiones; quapropter Problema pendet a magnitudine anguli prismatis refringentis. Sequitur enim ex ipsa constructione § II. quod hic angulus prismatis non erit major, quam ut segmentum circuli GHI, in quo idem angulus continetur, occurrat circulo, ex centro T radio TM descripto: si hic occursus fiat in binis punctis, e. g. in H. & K (Fig. 2.) erit problema possibile in binis casibus: i. e. bini dantur casus quibus radius emergens CD fiat parallelus ipsi AB (Fig. I.), quorum unus est, dum ang. ABa = ang. HGI; alter vero casus dum ang. ABa = ang. KGI.

Si segmentum GHI in unico duntaxat puncto occurrat

circulo

circulo MHK unicus quoque adest casus quo CD fit parallelus ipsi AB, nempe dum ang. a BA = ang. HGI. (Fig. 5.)

At si segmentum GHI intra circulum MHK ceciderit; Problema erit impossibile; vel, quod idem est, nullus dabitur casus, quo radius emergens CD fiat parallelus incidenti AB.

Hinc manifestum est angulum segmenti circularis GHI, quod tangit circulum MHK, esse limitem, quem angulus prismatis refringens excedere non debet, si modo radius emergens CD erit ipsi AB parallelus. Ad hunc autem limitem definiendum; Celeberr. MALLET problema proposuit solvitque, cujus nos aliam dabimus solutionem.

§. VIII.

Datis lineis TG, TI, TM, circulum per puncta G & I describere, qui circulum MHK continget.

Ducatur ex G recta GO = TM + TG, angulum quemcunque faciens cum recta GP; & ab ista abscindatur ON = IM (Fig. 5.); atque jungantur puncta M & N recta MN; nec non ex O agatur recta OP ipsi MN parallela; quo facto a puncto P ducatur recta PH, quæ circulum MHK contingat in puncto quodam H: si itaque circulus describatur per G, I & H, continget hic circulus circulum

MHK inpuncto H. Nam ob (GO $=$) $TM + TG : GP :: $ (NO $=$) $IM : MP$ (per conſtr.), habetur $IM \cdot GP = \overline{IP + MP} \cdot GP = \overline{TM + TG} \cdot MP$; quare $GP \cdot IP = \overline{TM + TG + GP} \cdot MP = \overline{2\,TM + MP} \cdot MP$; ſed $\overline{2\,TM + MP} \cdot MP = PH^2$ (Pr. 36. L. El. Eucl.), ergo $GP \cdot IP = PH^2$, & conſequenter circulus GIH continget circulum MHK in puncto H.

Cor. 1. Si angulus priſmatis refringens fuerit major angulo GHI (Fig. 5.) circulus GIH cadet intra circulum MHK, & problema erit impoſſibile; i. e. radius emergens CD non poteſt fieri parallelus incidenti AB.

Cor. 2. Quo minor fuerit angulus priſmatis refringens GHI, iisdem manentibus TM, TI, TG; eo major evadet circulus GIH, punctumque H eo propius accedet ad punctum M; & conſequenter eo minor erit angulus incidentiæ ſeu angulus HGI. Quapropter, ſi ang. GHI evaneſcat fiet circulus GIH infinite magnus, atque punctum H coincidet cum puncto M; & conſequenter angulus incidentiæ $=$ HGI quoque evaneſcet.

§. IX.

Hiſce poſitis, diſpiciendum erit, quo jure obſervationes Celeberr. D' ALEMBERT ſint factæ:

Quod

Quod itaque ad primum momentum (§. VI.) attinet, constructionem *Klingenstjernianam*, quæ in §. III. comparet, accommodabimus ad expressiones analyticas *D' Alembertianas*, ut falsitas conclusionis ipsius eo clarius patescat. Fiat proinde in Fig. 3. $TM : TG :: m : 1 :: 1 : \frac{1}{m}$; & $TM : TI :: M : 1 :: 1 : \frac{1}{M}$; atque $TM : Tg :: m' : 1 :: 1 : \frac{1}{m'}$ nec non $TM : Ti :: M' : 1 :: 1 : \frac{1}{M'}$. Ex prima analogia habetur $GM : TM :: \frac{1}{m} - 1 : 1$; unde $TM = \frac{GM}{\frac{1}{m} - 1}$. Et simili supputatione facta per reliquas analogias prodibunt æquationes $\frac{GM}{\frac{1}{m} - 1} = \frac{IM}{\frac{1}{M} - 1} = \frac{gm}{\frac{1}{m'} - 1} = \frac{im}{\frac{1}{M'} - 1}$; atque hinc $\frac{GM}{gm} = \frac{IM}{im} = \frac{\frac{1}{m} - 1}{\frac{1}{m'} - 1} = \frac{\frac{1}{M} - 1}{\frac{1}{M'} - 1} = a$, quæ est prior D' ALEMBERTI formula. Ut obtineatur posterior ista in lineis quoque axexpressa, sequentes ex iisdem analogiis deducuntur æquationes; nempe $m.TG = M.TI$; $m'.Tg = M'Ti$; quarum prior dat $TI : TG :: m : M :: \frac{m}{M} : 1$; unde $GI : TG :: \frac{m}{M} - 1 : 1$; vel $\frac{GI}{TG} = \frac{m}{M} - 1$. Et posterior $\frac{gi}{Tg} = \frac{m'}{M'} - 1$; quare $\frac{GI}{TG} \times \frac{Tg}{gi} =$

$$\frac{\frac{m}{M} - 1}{\frac{m'}{M'} - 1} = a,$$

quæ est altera expressio, quæque ad demonstrationem *Klingenstjernianam*, ut D' ALEMBERT contendit, statuenda foret, æqualis priori formulæ: i. e. $\frac{GM}{gm} = \frac{GI}{TG} \times \frac{Tg}{gi}$ quare $GM : gm :: \frac{GI}{TG} : \frac{gi}{Tg}$; sed per legem *Newtonianam* est $GI : gi :: GM : gm$; adeoque $GM : gm :: \frac{GM}{TG} : \frac{gm}{Tg}$; ergo foret $\frac{1}{TG} = \frac{1}{Tg}$, seu $TG = Tg$: quod est absurdum & contra *Klingenstjernianam* constructionem; quapropter corruit hæc Cel. D' ALEMBERTI observatio.

§. X.

Quod Celeberr. D' ALEMBERT secundo animadveradvertit, id quoque facile refellitur per Cor. 2. §. VIII. ubi ostensum est punctum H eo propius accedere ad M (Fig. 2.) quo minor evadit angulus refringens BFC = GHI; quo ipso etjam HGI & HIM magis magisque minuuntur, propiusque ad æqualitatem tam inter se, quam cum GHI accedunt, adeo ut prorsus evanescant evanescente ang. GHI, seu coincidente puncto H cum M : i. e. FC erit parallela ipsi FB (Fig. 1.) atque radius incidens AB debet esse perpendicularis ad FB, si modo radius emergens CD fuerit parallelus ipsi AB. Patet itaque hinc veritas asserti *Klingenstjerniani*: nimirum rationes GM : IM & *gm* : *im* (Fig. 3.) eo magis ad æqualitatem accedere, quo minor ang GHI evadit.

De cetero reticendum non est, defensionem demonstrationis *Klingenstjernianæ*, quam Celeb. MALLET suscepit & perfecit, nec non cum Celeberr. D' ALEMBERT communicavit, magnum hunc Mathematicum nimiæ præcipitantiæ convicisse: id quod per litteras *In Actis Reg. Acad. Scient. Stockh. An. 1772. p. 66.* Celeberr. MALLET hunc in modum significavit: "J'ai enfin trouvé un moment pour" examiner de nouveau le Theoreme de feu M:eur" KLINGENSTJERNA, & j'ai reconnu, qu' en ef-" fet ce Theoreme n'entraine pas la supposition" que je croyois; Mais malgré cela le Theoreme ne" m'en paroit pas plus concluant. Il seroit trop" long & trop fatiguant pour moi de Vous en dire" la raison j'ai fait la dessus un Memoire, que je" don-

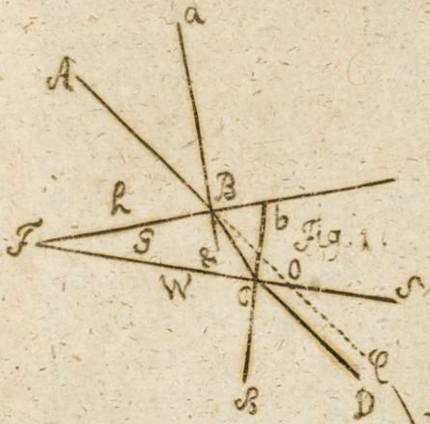
Fig. 1
a
A
B
h
b
W
o
D

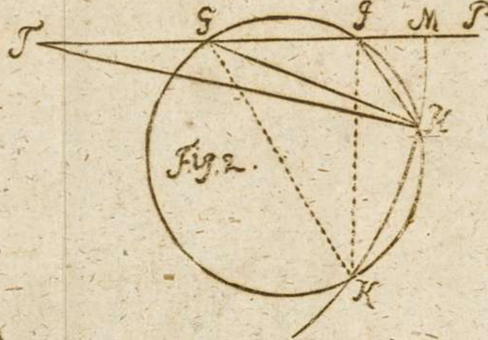
Fig. 2
G
M
P
K

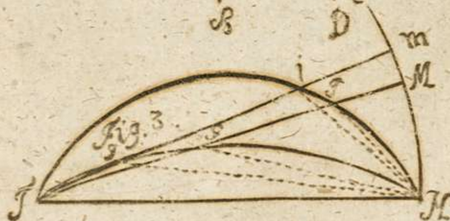
Fig. 3
m
M
H

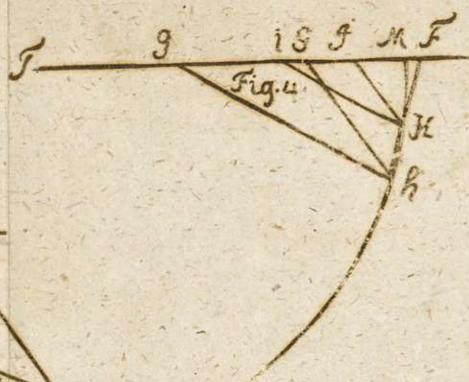
Fig. 4
g
M
F
H
h

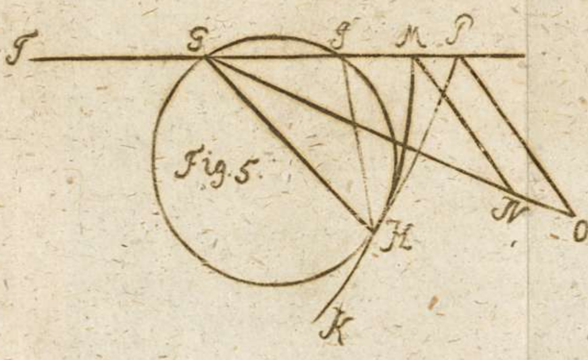
Fig. 5
G
M
P
N
O
H
K

"donnerai a l' Academie, & ou je m' explique plus "au long ſur ce ſujet.

Nova itaque dubia Celeberr. D' ALEMBERT molitur contra demonſtrationem *Klingenſtjernianam*, quæ novam diſſerendi materiam dabunt. Interea manum de tabula.

In Fig. 4. loco *i* lege G & loco G lege *i*.